11 класс
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

Доказательство. По условию, оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны, значит рационально и их произведение, равное $xy+2+\frac{1}{xy}$**,** следовательно, рациональна сумма $xy+\frac{1}{xy}$. Тогда рационален и её квадрат, равный $x^2y^2+2+\frac{1}{x^2y^2}$**,** а вместе с ним и требуемое в условии выражение $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$**.**

Критерии проверки. Установлена рациональность выражения $xy+\frac{1}{xy}$: 3 балла.

Если в решении заявляется о рациональности или целочисленности самих чисел x, y**: 0** баллов.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$**.** Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n**.**

Ответ. $a_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$**.**

Решение. Посчитаем первые члены последовательности $a_n, n=2,3$. Для a_2 имеем по условию $a_2=1+\sqrt{1+a_2}$, то есть $a_2{}^2-3a_2=0$ и $a_2>1$**,** откуда $a_2=3=1+2$**.** Для a_3 имеем тогда $a_3=3+\sqrt{3+a_3}$, то есть $a_3{}^2-7a_3+6=0$ и $a_3>3$, откуда $a_3=6=1+2+3$. Отсюда легко угадывается общая формула $a_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$**.**

Докажем её по индукции. База уже доказана для $n=1,2,3$**.** Пусть формула верна для n**,** тогда для a_{n+1} имеем по условию $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}+a_{n+1}}$,. то есть $a_{n+1}{}^2-(n^2+n+1)a_{n+1}+\frac{n^4+2n^3-n^2-2n}{4}=0$ и $a_{n+1}>\frac{n(n+1)}{2}$**.** Дискриминант этого квадратного уравнения равен $(n^2+n+1)^2-(n^4+2n^3-n^2-2n)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, откуда $a_{n+1}=\frac{(n^2+n+1)\pm(2n+1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2},\frac{n^2-n}{2}$**.** С учётом ограничения $a_{n+1}>\frac{n(n+1)}{2}$ получаем $a_{n+1}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Формула для a_n угадана верно и проверена для малых $n=2,3$: 1 балл**.** Формула для a_n найдена верно и полностью обоснована (с отбором нужных корней) для малых $n=2,3$, но не доказана в общем случае: 2 балла.

Есть доказательство формулы в общем случае, но нет пояснения отбору нужного корня: минус 2 балла.

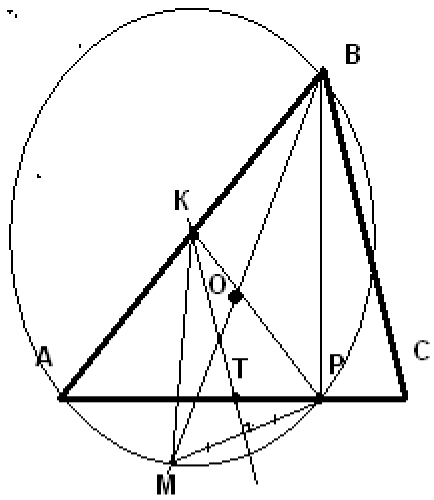
11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?
Ответ. В 8 цветов.
Решение. Если бы клетки были раскрашены в 9 и более цветов, то нашёлся бы цвет, в который окрашена всего одна клетка. Клеток, расположенных с ней в одной строке или столбце всего 6, поэтому других цветов, образующих с ней пару, требуемую в условии. не больше 6 – противоречие. Следовательно, клетки могут быть окрашены не более, чем в 8 цветов.
Приведём два существенно различных примера требуемой в условии окраски в 8 цветов, при этом в каждый цвет окрашены ровно по две клетки квадрата.

5	6	3	8
3	4	2	7
2	1	6	5
1	7	8	4

6	7	8	3
4	5	2	6
2	3	4	5
1	1	7	8

Критерии проверки. Доказано, что клетки не могут быть окрашены более, чем в 8 цветов (то есть сделана верхняя оценка числа цветов): 3 балла.
Явно приведён любой верный пример требуемой в условии окраски в 8 цветов: 3 балла. Обоснование его и описание идеи построения не требуются.
Есть и пример и оценка: 7 баллов.

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.



Доказательство. Обозначим за K и T середины сторон AB и AC соответственно. По построению, отрезки KP и KM симметричны, поэтому их длины равны. Точка K является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника ABP, поэтому KA=KB=KP=KM и M лежит на описанной окружности треугольника ABP. Следовательно, равны вписанные углы ABM и APM, опирающиеся на общую дугу AM.
Подсчитаем величину угла APM: она равна величине BPM минус 90°, а величина BPM равна сумме $\angle BPK=\angle KBP=90^\circ-A$ и $\angle KPM=90^\circ-PKT$. Из равнобедренного треугольника AKP величина $\angle PKT$ равна разности $\angle AKP=180^\circ-2A$ и $\angle AKT=B$, поэтому $\angle APM=\angle BPM-90^\circ=(90^\circ-A)+(90^\circ-\angle PKT)-90^\circ=90^\circ-A-PKT=90^\circ-A-((180-2A)-B)=B+A-90^\circ=90^\circ-C$.
С другой стороны, величина центрального угла AOB равна удвоенной величине вписанного угла ACB, опирающегося на дугу AB, то есть 2C. Тогда величина $\angle ABO$ равна $90^\circ-\angle AOB/2=90^\circ-C=\angle APM=\angle ABM$. Равенство углов ABO и ABM обозначает, что точка O лежит на прямой BM, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. Показано, что M лежит на описанной окружности треугольника ABP: 1 балл. Найден угол APM: 3 балла. Показано равенство углов APM и ABM: 1 балл. Найден угол ABO: 1 балл. Указано, что равенство углов ABO и ABM обозначает, что точка O лежит на прямой BM: 1 балл.

Итого 7 баллов.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.

Ответ. $a=1,2,4$.

Решение. То, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа при $a=1,2,4$ следует из неравенств $n^2<n(n+1)<n(n+2)<(n+1)^2$ и $n^2<n(n+4)<(n+2)^2, n(n+4)\neq(n+1)^2$. Докажем, что при всех остальных натуральных a произведение $n(n+a)$ всегда является квадратом натурального числа при подходящем значении n.

Пусть сначала a не является степенью двойки, то есть записывается в виде $a=2^k(2m+1)$ при некоторых $k\geq 0, m\geq 1$. В этом случае при любом натуральном n имеем $n(n+a)=n^2+2\cdot 2^k\cdot m\cdot n+2^k\cdot n=(n+2^k m)^2+2^k\cdot n-2^{2k}m^2$. Положим $n=2^k m^2\geq 1$ - натуральное число, тогда $n(n+a)=(n+2^k m)^2$ - квадрат натурального числа.

Рассмотрим оставшийся случай, когда a является степенью двойки, отличной от 1, 2 и 4, то есть записывается в виде $a=2^k$ при некотором $k\geq 3$. В этом случае при любом натуральном n имеем $n(n+a)=n^2+2^k n=n^2+2\cdot 2^{k-2}\cdot n+2^{k-1}n=(n+2^{k-2})^2+2^{k-1}n-2^{2k-4}$. Положим $n=2^{k-3}\geq 1$ - натуральное число, тогда $n(n+a)=(n+2^{k-2})^2$ - квадрат натурального числа.

Критерии проверки. Доказано, что $a=1,2$ являются решениями задачи: 1 балл. Доказано, что $a=4$ является решением задачи: 1 балл. Доказано, что для какой-то бесконечной серии значений a (скажем, для всех нечётных) произведение $n(n+a)$ является точным квадратом при подходящем значении n: 1 балл. При этом подразумевается, что тех a, для которых ответ остался неясным, тоже бесконечно много.